第 12 講　微分について

12

［A］　関数 $f(x)$，$g(x)$ はいずれも $x \geqq 0$ において連続で，かつ $g(x)>0$ であるとする．さらに $x \geqq 0$ において関数 $H(x)$，$G(x)$ を

$$H(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt$$

と定義する．次の各問いに答えよ．

(1)　$b>0$ が与えられたとき，$x \geqq 0$ において関数 $P(x)$ を

$$P(x)=G(b)H(x)-H(b)G(x)$$

と定義すると

$$P'(c)=0$$

$$0<c<b$$

となる実数 c が存在することを示せ．

(2)　$b>0$ ならば，$\dfrac{H(b)}{G(b)}=f(c)$，$0<c<b$ となる実数 c が存在することを示せ．

(3)　関数 $f(x)$ が $x>0$ において単調増加なら，関数 $\dfrac{H(x)}{G(x)}$ も $x>0$ で単調増加であることを示せ．

［B］　連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，それぞれ以下の問いに答えよ．

(1)　任意の実数 x に対して $f(x)$ は $f(2x)=2f(x)$ を満たすとする．

(ア)　$f'(x)=f'(0)$ を示せ．

(イ)　$f'(0)=3$ として $f(x)$ を求めよ．

(2)　任意の実数 x に対して $g(x)$ は $g(2x)=\{g(x)\}^2$ を満たすとする．

(ア)　$g(0)$ を求めよ．

(イ)　$g(x)$ を求めよ．ただし，$g(0) \neq 0$ とし，$g'(0)=2$ とする．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　微分について

12　関数 $y=f(x)$ は連続とする．

(1)　a を実数の定数とする．すべての実数 x に対して不等式 $|f(x)-f(a)| \leqq \dfrac{2}{3}|x-a|$ が成り立つなら，曲線 $y=f(x)$ は直線 $y=x$ と必ず交わることを中間値の定理を用いて証明せよ．

(2)　さらに，すべての実数 x_1，x_2 に対して $|f(x_1)-f(x_2)| \leqq \dfrac{2}{3}|x_1-x_2|$ が成り立つならば，(1)の交点はただ1つしかないことを証明せよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　微分について

12

［A］　関数 $f(x)$，$g(x)$ はいずれも $x \geqq 0$ において連続で，かつ $g(x)>0$ であるとする．さらに $x \geqq 0$ において関数 $H(x)$，$G(x)$ を

$$H(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt$$

と定義する．次の各問いに答えよ．

(1)　$b>0$ が与えられたとき，$x \geqq 0$ において関数 $P(x)$ を

$$P(x)=G(b)H(x)-H(b)G(x)$$

と定義すると

$$P'(c)=0$$

$$0<c<b$$

となる実数 c が存在することを示せ．

(2)　$b>0$ ならば，$\dfrac{H(b)}{G(b)}=f(c)$，$0<c<b$ となる実数 c が存在することを示せ．

(3)　関数 $f(x)$ が $x>0$ において単調増加なら，関数 $\dfrac{H(x)}{G(x)}$ も $x>0$ で単調増加であることを示せ．

［B］　連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，それぞれ以下の問いに答えよ．

(1)　任意の実数 x に対して $f(x)$ は $f(2x)=2f(x)$ を満たすとする．

(ア)　$f'(x)=f'(0)$ を示せ．

(イ)　$f'(0)=3$ として $f(x)$ を求めよ．

(2)　任意の実数 x に対して $g(x)$ は $g(2x)=\{g(x)\}^2$ を満たすとする．

(ア)　$g(0)$ を求めよ．

(イ)　$g(x)$ を求めよ．ただし，$g(0)\neq 0$ とし，$g'(0)=2$ とする．

【答】　［A］　略

［B］　(1) (ア) 略　(イ) $f(x)=3x$　(2) (ア) $g(0)=0,\ 1$　(イ) $g(x)=e^{2x}$

【解説】

［A］　(1)　条件より $H(x)$，$G(x)$ はともに $0 \leqq x \leqq b$ において連続で，$0<x<b$ において微分可能であるので，$P(x)$ も同様である．よって平均値の定理より

$$\frac{P(b)-P(0)}{b-0}=P'(c) \text{ かつ } 0<c<b$$

なる実数 c が存在するが

$$P(b)=G(b)H(b)-H(b)G(b)=0$$

$$P(0)=G(b)H(0)-H(b)G(0)=0$$

より題意は示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$P'(x)=G(b)f(x)g(x)-H(b)g(x)$ であることと $g(x)>0$ より $x>0$ において $G(x)>0$，それと(1)より

$$\begin{aligned} & P'(c)=0 \text{ かつ } 0<c<b \\ \Longleftrightarrow\ & G(b)f(c)g(c)-H(b)g(c)=0 \text{ かつ } 0<c<b \\ \Longleftrightarrow\ & G(b)f(c)=H(b) \text{ かつ } 0<c<b \\ \therefore\ & \frac{H(b)}{G(b)}=f(c) \text{ かつ } 0<c<b \end{aligned}$$

(3)　以下では(1)と(2)の c を用いる．

$P'(x)=G(b)g(x)\left\{f(x)-\dfrac{H(b)}{G(b)}\right\}$ より $P'(x)=G(b)g(x)\{f(x)-f(c)\}$ であるが，$f(x)$ が $x>0$ において単調増加であるから，

$$f(x)<f(c)\ \ (0<x<c)$$
$$f(x)>f(c)\ \ (c<x<b)$$

となり，これと $G(b)g(x)>0$ から，$P(x)$（$0<x<b$）の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		↘		↗	

よって，$P(0)=P(b)=0$ から，$0<x<b$ のとき $P(x)=G(b)H(x)-H(b)G(x)<0$，つまり $\dfrac{H(x)}{G(x)}<\dfrac{H(b)}{G(b)}$ となる．

これは関数 $\dfrac{H(x)}{G(x)}$ が $x>0$ において単調増加であることを示している．

［B］(1)　(ア)

$$\begin{aligned} f'(2x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2x+h)-f(2x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2x+2h)-f(2x)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2(x+h))-f(2x)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2f(x+h)-2f(x)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \end{aligned}$$

よって n を自然数として帰納的に

$$f'(x)=f'\left(\frac{1}{2^n}x\right)$$

が成り立つが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}x\right)=0$ であることと $f'(x)$ が連続であることより

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'\left(\frac{1}{2^n}x\right)=f'(0)$$

(イ)　$f'(0)=3$ より $f'(x)=3$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\therefore \quad f(x)=3x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

ここで，$f(2x)=2f(x)$ に $x=0$ を代入して

$$f(0)=2f(0) \qquad \therefore \quad f(0)=0$$

ゆえに $C=0$ となるので

$$\boldsymbol{f(x)=3x}$$

(2)　(ア)　$g(2x)=\{g(x)\}^2$ に $x=0$ を代入して

$$g(0)=\{g(0)\}^2 \iff g(0)\{1-g(0)\}=0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{g(0)=0,\ 1}$$

(イ)　$g(t)=0$ となる実数 t が存在するとすると，

$$g(2t)=\{g(t)\}^2=0$$

よって n を自然数として帰納的に $g(t)=g\left(\dfrac{1}{2^n}t\right)=0$ が成り立つ．

(ア)，$g(0)\neq 0$ より $g(0)=1$ となるが，

$$g'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{g\left(\dfrac{1}{2^n}t\right)-g(0)}{\dfrac{1}{2^n}t}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\cdot 2^n\right)$$

これは $g'(0)=2$ に反する．よって $g(x)\neq 0$　ゆえに

$$g(2x)=\{g(x)\}^2>0$$

両辺の対数をとると

$$\log g(2x)=2\log g(x)$$

$f(x)=\log g(x)$ とおくと(1)より

$$f'(x)=f'(0)=\frac{g'(0)}{g(0)}=2$$

$$\therefore \quad f(x)=2x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

となるが，$f(0)=C=\log g(0)$ より

$$C=0 \qquad \therefore \quad f(x)=2x$$

よって

$$\boldsymbol{g(x)=e^{2x}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　微分について

12　関数 $y=f(x)$ は連続とする．

(1)　a を実数の定数とする．すべての実数 x に対して不等式 $|f(x)-f(a)| \leqq \frac{2}{3}|x-a|$ が成り立つなら，曲線 $y=f(x)$ は直線 $y=x$ と必ず交わることを中間値の定理を用いて証明せよ．

(2)　さらに，すべての実数 x_1，x_2 に対して $|f(x_1)-f(x_2)| \leqq \frac{2}{3}|x_1-x_2|$ が成り立つならば，(1)の交点はただ１つしかないことを証明せよ．

【答】　略

【解説】

(1)

$$|f(x)-f(a)| \leqq \frac{2}{3}|x-a|$$

$$\iff \quad f(a)-\frac{2}{3}|x-a| \leqq f(x) \leqq f(a)+\frac{2}{3}|x-a|$$

よって

$$f(a)-\frac{2}{3}|x-a|-x \leqq f(x)-x \leqq f(a)+\frac{2}{3}|x-a|-x$$

が成り立つ．ここで

$$\lim_{x\to\infty}\left\{f(a)+\frac{2}{3}|x-a|-x\right\}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{f(a)-\frac{2}{3}|x-a|-x\right\}=\infty$$

より

$f(x)-x=0$ となる x，つまり $f(x)=x$ となる x は存在する．

よって $y=f(x)$ と $y=x$ は必ず共有点をもつ．

(2)　$f(x)=x$ となる実数解の１つを α とおき，

$g(x)=x-f(x)$ とすると，$g(\alpha)=\alpha-f(\alpha)=0$　ここで，$x \neq \alpha$ のとき

$$\begin{aligned}|g(x)| &= |x-f(x)| \\ &= |x-\alpha-\{f(x)-f(\alpha)\}| \quad (f(\alpha)=\alpha \text{ より}) \\ &\geqq |x-\alpha|-|f(x)-f(\alpha)| \\ &\geqq |x-\alpha|-\frac{2}{3}|x-\alpha| \\ &= \frac{1}{3}|x-\alpha|>0\end{aligned}$$

よって $g(x) \neq 0$ $(x \neq \alpha)$　ゆえに $x=\alpha$ 以外で $g(x)=0$ となるものはない．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。